

# مدیریت زنجیره تامین

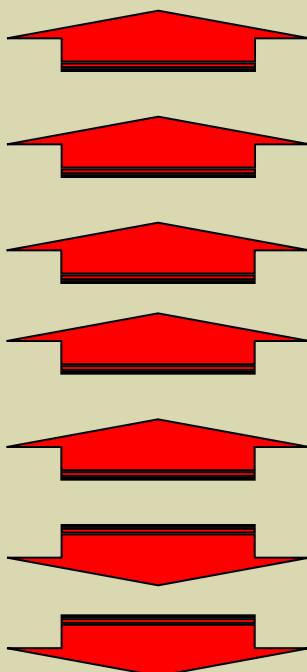
Supply Chain Management

هماهنگی در زنجیره تامین

# هماهنگی در زنجیره تامین

■ اهمیت هماهنگی در زنجیره تامین  
■ اثرات عدم هماهنگی

■ هزینه تولید



■ هزینه موجودی

■ پیش زمان تحویل

■ هزینه حمل و نقل

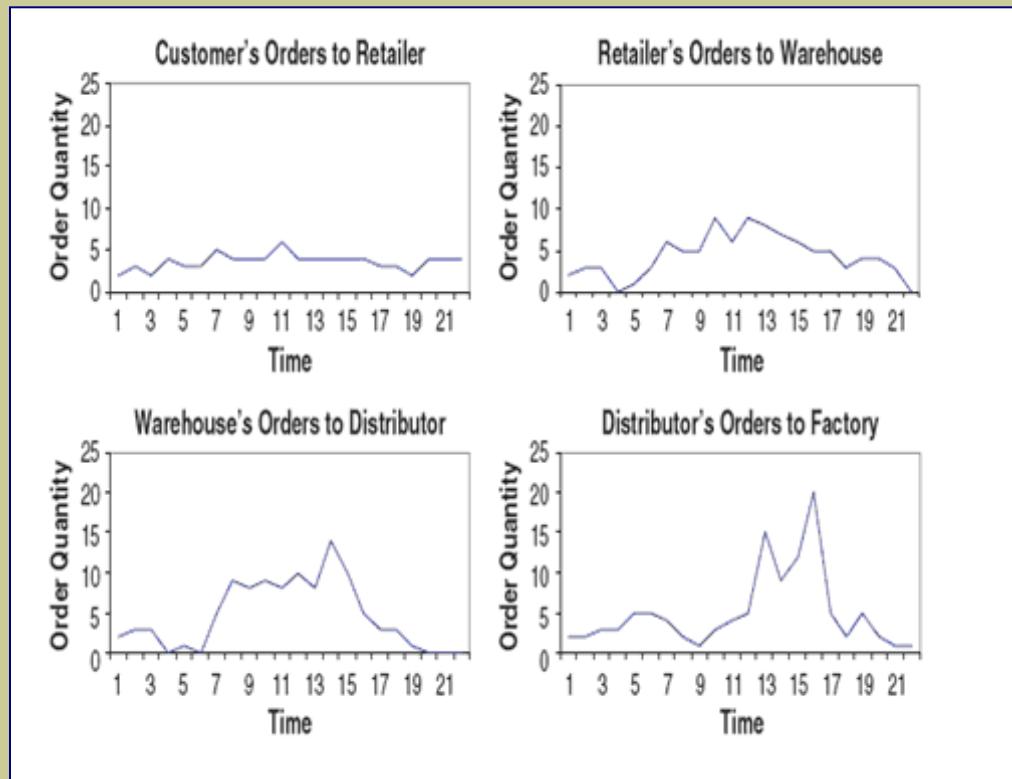
■ هزینه نیروی انسانی تحویل و انبار

■ سطح دسترس پذیری محصول

■ سودآوری

# هماهنگی در زنجیره تامین

اثر شلاقی در زنجیره تامین



(Lee et al., 1997) منبع

# هماهنگی در زنجیره تامین

اثر شلاقی در زنجیره تامین



در یک زنجیره تامین ۳ مرحله‌ای، یک تغییر ۱۰ درصدی در تقاضا میتواند منجر به بروز تغییر ۴۴ درصدی در سفارشات مرحله سوم گردد

**McCullen & Towill, 2002**

حذف اثر شلاقی می‌تواند منجر به افزایش سود زنجیره تامین به میزان ۱۰ تا ۳۰ درصد شود !

**(McCullen & Metters, 1997 )**

# هماهنگی در زنجیره تامین

## اثر شلاقی در زنجیره تامین



### مطالعات موردي



کمپانی باریلا 1994

پروژه SNEL 2000

سیستم‌های سیسکو 2001

زنجیره تامین خواربار در اسپانیا 2005

# هماهنگی در زنجیره تامین

## مطالعات اثر شلاقی در زنجیره تامین

مطالعات تحلیلی اثر شلاقی

تحلیل علل

شبیه سازی

طراحی آزمایشها

...



اندازه گیری اثر شلاقی

الگوی تقاضا

پیش بینی ها

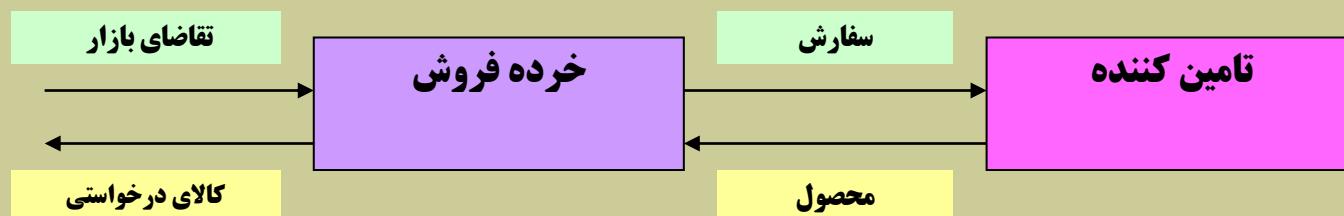
سفارش گذاری

...



# هماهنگی در زنجیره تامین

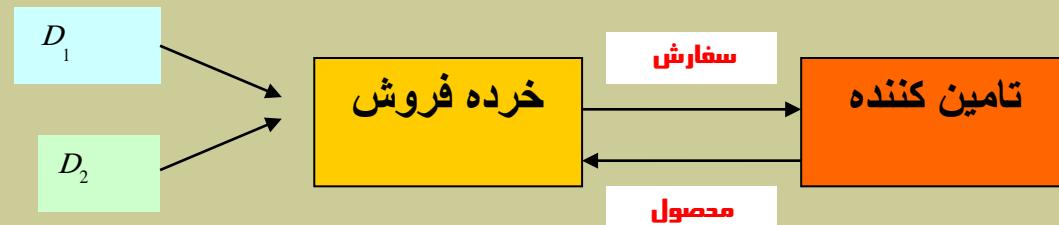
## مراحل زنجیره تامین



یک زنجیره تامین دو مرحله ای

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تعداد محصولات



محصول دوم: تویوتا کرولا

محصول اول: تویوتا کمری

خودروسازی

## هماهنگی در زنجیره تامین

### • عوامل موثر در تعیین رابطه برای اندازه گیری اثر شلاقی

- الگوی تقاضا
- روش سفارش گذاری
- روش پیش بینی تقاضا در دوره پیش زمان تحويل (لیدتايم)

# هماهنگی در زنجیره تامین

## الگوی تقاضا



وابستگی تقاضای هر محصول در هر دوره به تقاضای دوره های قبل  
همان محصول

وابستگی تقاضای هر محصول به تقاضای محصول دیگر  
به عنوان مثال تقاضای تویوتا کمری در ماه جاری به تقاضای همین  
محصول و تقاضای تویوتا کرولا در ماه قبل بستگی دارد

مدل سری زمانی اتورگرسیو برداری مرتبه اول

**First Order Vector Auto Regressive: VAR(1)**

Lee et al.(2000), Chen et al.(2000a,b), Zhang(2004),  
Hosoda&Disney (2006), Kim et al.(2006),  
Chandra&Grabis (2005), Luong&Phien (2007),  
Gaalman&Disney (2007)

# هماهنگی در زنجیره تامین

## سیاست سفارش گذاری



سفارش گذاری

دوره سفارش

نقطه سفارش

رفتار عمومی خرده فروشان به این صورت است که در دوره های زمانی (مثل روز، ماه ...) موجودی خود را کنترل نموده و اقدام به سفارش گذاری میکنند  
(Disney et al.2006)

**روش سفارش گذاری تا حد معین: OUT**

**(Gilbert, 2005) روش استاندارد در بسیاری سیستمهای تولیدی**

Lee et al.(2000), Chen et al.(2000a,b), Zhang(2004), Gilbert(2005),  
Hosoda&Disney (2006), Kim et al.(2006), Chandra&Grabis (2005),  
Luong&Phien (2007), Gaalman&Disney (2007), Luong (2007)

# هماهنگی در زنجیره تامین

## روش پیش بینی تقاضای دوره لیدتايم

روش متداول پیش بینی

Silver et al., 2000

Makridakis et al., 1998

میانگین متحرک

Moving Average: MA

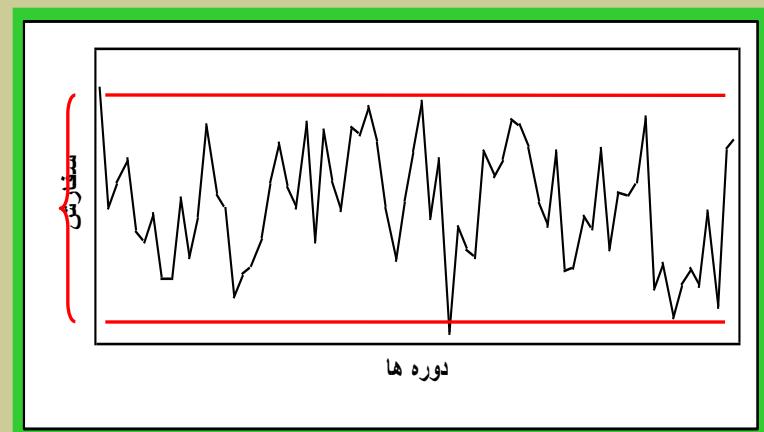
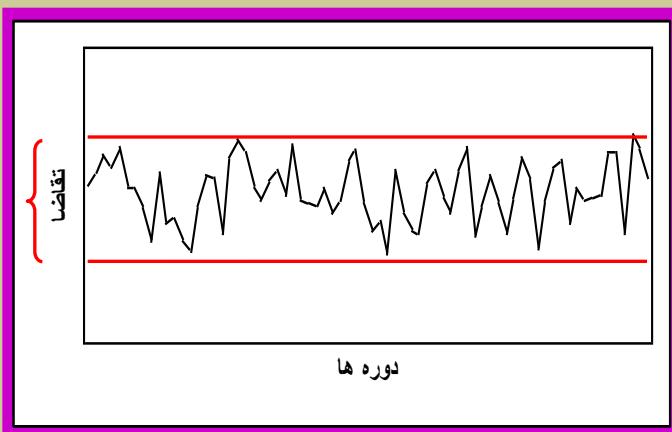
هموارسازی نمایی

Exponential Smoothing: ES

تحلیل اثر شلاقی در دو حالت صورت می گیرد

# هماهنگی در زنجیره تامین

مفهوم اثر شلاقی



خرده فروش

سفارش گذاری

تامین کننده



# هماهنگی در زنجیره تامین

No Measurement, No Management

اندازه گیری اثر شلاقی

$$BE = \frac{Var(Q_t)}{Var(D)}$$



$$BE > 1$$

# هماهنگی در زنجیره تامین

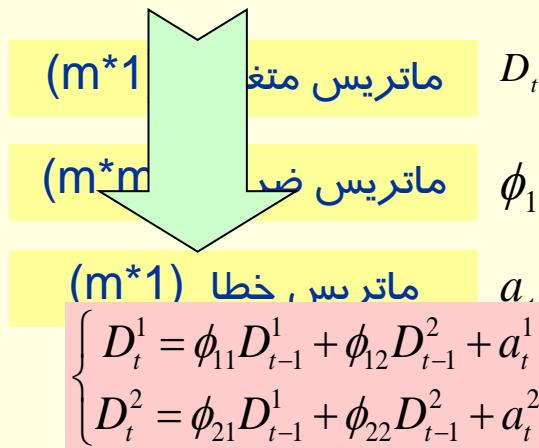
تعیین واریانس تقاضا



$$BE = \frac{Var(Q_t)}{Var(D)}$$

$$D_t = \phi_1 D_{t-1} + a_t$$

مدل سری زمانی اتورگرسیو برداری مرتبه اول: VAR(1)



زنجیره تامین دومحصولی: m=2

$$D_t = \begin{bmatrix} D_t^1 \\ D_t^2 \end{bmatrix} \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad a_t = \begin{bmatrix} a_t^1 \\ a_t^2 \end{bmatrix}$$

توبوتا  
کمری

توبوتا کرولا

# هماهنگی در زنجیره قامین

تعیین واریانس تقاضا



$$\Gamma(k) = \begin{cases} \Gamma(-1)\phi'_1 + \Sigma & k=0 \\ \Gamma(k-1)\phi'_1 = \Gamma(0)(\phi'_1)^k & k \geq 1 \end{cases}$$

ماتریس کوواریانس

$$\Gamma(0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \phi_{11}^2 & -2\phi_{11}\phi_{12} & -\phi_{12}^2 \\ -\phi_{11}\phi_{21} & 1 - \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} & -\phi_{12}\phi_{22} \\ -\phi_{21}^2 & -2\phi_{21}\phi_{22} & 1 - \phi_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}$$



- |               |                               |
|---------------|-------------------------------|
| $\gamma_{11}$ | واریانس تقاضای کمری           |
| $\gamma_{22}$ | واریانس تقاضای کرولا          |
| $\gamma_{12}$ | کوواریانس بین تقاضای دو محصول |

# هماهنگی در زنجیره تامین

تعیین واریانس تقاضا



واریانس تقاضای  
توفیوتا کمری

$$\gamma_{11} = \frac{\left( \sigma_{11} ((1 - \phi_{11}\phi_{22})(1 - \phi_{22}^2) - \phi_{12}\phi_{21}(1 + \phi_{22}^2)) + \right.}{1 + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} - 1)(\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2)} \\ \left. + 2\phi_{12}\sigma_{12}(\phi_{11}(1 - \phi_{22}^2) + \phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}) + \phi_{12}^2\sigma_{22}(1 - \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}\phi_{22}) \right)$$

$$\gamma_{22} = \frac{\left( \phi_{21}^2\sigma_{11}[1 + \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21}] + 2\phi_{21}\sigma_{12}[\phi_{22}(1 - \phi_{11}^2) + \phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}] \right.}{1 + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} - 1)(\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2)} \\ \left. + \sigma_{22}[(1 - \phi_{11}\phi_{22})(1 - \phi_{11}^2) - \phi_{12}\phi_{21}(1 + \phi_{11}^2)] \right)$$

واریانس تقاضای  
توفیوتا کرولا

$$\gamma_{12} = \frac{\left( \phi_{21}\sigma_{11}[\phi_{11}(1 - \phi_{22}^2) + \phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}] + \right.}{1 + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} - 1)(\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2)} \\ \left. + \sigma_{12}[(1 - \phi_{11}^2)(1 - \phi_{22}^2) - \phi_{12}^2\phi_{21}^2] + \phi_{12}\sigma_{22}[\phi_{22}(1 - \phi_{11}^2) + \phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}] \right)$$

کوواریانس بین دو  
تقاضا

# هماهنگی در زنجیره تامین

سیاست سفارش گذاری



(Zipkin,2000)

هزینه کمبود واحد محصول b

هزینه نگهداری واحد محصول h



$$z = \phi^{-1} \left( \frac{b}{h + b} \right)$$

$$Q_t = S_t - S_{t-1} + D_{t-1}$$

$$S_t = \hat{D}_t^L + z \hat{\sigma}_t^L$$

$$\hat{D}_t^L$$

برآورد تقاضای لیدتايم

$$\hat{\sigma}_t^L$$

برآورد انحراف معیار خطای  
پیش بینی تقاضای دوره لیدتايم

سطح سرویس دهی به مشتری  
(از جدول نرمال استاندارد)

$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + z(\hat{\sigma}_t^L - \hat{\sigma}_{t-1}^L) + D_{t-1}$$

# هماهنگی در زنجیره تامین

پیش‌بینی‌سنجیده قراضتی چندگیون فرموشن در دوره لیدتايم



$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + z(\hat{\sigma}_t^L - \hat{\sigma}_{t-1}^L) + D_{t-1}$$



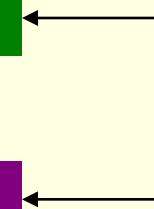
$$\hat{D}_t = \frac{\sum_{i=1}^p D_{t-i}}{p}$$

میانگین متحرک

$$\hat{D}_t = \alpha D_{t-1} + (1-\alpha)\hat{D}_{t-1}$$

هموارسازی نمایی

روش پیش بینی



# هماهنگی در زنجیره تامین

پیش بینی به روشن میانگین متحرک



$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + z(\hat{\sigma}_t^L - \hat{\sigma}_{t-1}^L) + D_{t-1}$$

اثبات می شود:

$$(\hat{\sigma}_t^L)^2 = L\gamma + 2\sum_{i=1}^{L-1} (L-i)\gamma(i) + \left(\frac{L}{p}\right)[L\gamma - 2[\gamma(1) - \left[(\frac{L}{p})\sum_{i=1}^{p-1} (p-i)\gamma(i) + \sum_{i=2}^{L+p-1} \gamma(i)\right]]]$$

$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + D_{t-1}$$

$$\hat{\sigma}_t^L = \hat{\sigma}_{t-1}^L$$

$$Q_t = \left(1 + \frac{L}{p}\right)D_{t-1} - \left(\frac{L}{p}\right)D_{t-p-1}$$

$$Var(Q_t) = \left(1 + \frac{L}{p}\right)^2 \gamma + \left(\frac{L}{p}\right)^2 \gamma - 2\left(1 + \frac{L}{p}\right)\left(\frac{L}{p}\right)\gamma(p)$$

# هماهنگی در زنجیره تامین

تعیین رابطه برای اندازه گیری اثر شلاقی (پیش بینی میانگین متحرک)



$$BE = \frac{Var(Q_t)}{Var(D)}$$

$$BE = 1 + 2 \left( \frac{L}{p} \right) \left( 1 + \frac{L}{p} \right) \left( 1 - \frac{\gamma(p)}{\gamma} \right)$$

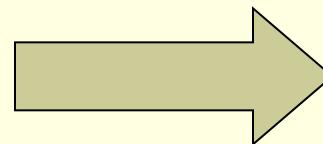


$$\Gamma(k) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k) \\ \gamma_{12}(k) & \gamma_{22}(k) \end{bmatrix}$$



$$\Gamma(k) = \begin{cases} \Gamma(-1)\phi'_1 + \Sigma & k = 0 \\ \Gamma(k-1)\phi'_1 = \underbrace{\Gamma(0)(\phi'_1)^k}_{k \geq 1} & k \geq 1 \end{cases}$$

$$\Gamma(k) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \left[ \begin{array}{cc} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{array} \right]^k \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \end{bmatrix}$$



$k = 1, 2, 3, 4, 5$

# هماهنگی در زنجیره تامین

محصول اول  
توبوتا کمری

تعیین رابطه برای اندازه گیری اثر شلاقی (پیش بینی میانگین متحرک)



$$\left\{ \begin{array}{l} BE_1^1 = 1 + 2L_1(1+L_1) \left( 1 - \phi_{11} - \phi_{12} \left( \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \right) \left( \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \right) \right) \\ BE_2^1 = 1 + L_1 \left( 1 + \frac{L_1}{2} \right) \left( 1 - (\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) - \phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{21}) \left( \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \right) \right) \\ BE_3^1 = 1 + 2 \left( \frac{L_1}{3} \right) \left( 1 + \frac{L_1}{3} \right) \left( 1 - (\phi_{11}^3 + \phi_{21}\phi_{12}(2\phi_{11} + \phi_{22})) - \phi_{12}(\phi_{11}^2 + \phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) \left( \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \right) \right) \\ BE_4^1 = 1 + \left( \frac{L_1}{2} \right) \left( 1 + \frac{L_1}{4} \right) \left( 1 - (\phi_{11}^4 + \phi_{11}\phi_{21}\phi_{12}(3\phi_{11} + 2\phi_{22})) + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) \left( \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \right) \left( \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \right) \right) \\ BE_5^1 = 1 + 2 \left( \frac{L_1}{5} \right) \left( 1 + \frac{L_1}{5} \right) \left( 1 - (\phi_{11}^5 + \phi_{21}\phi_{12}(4\phi_{11}^3 + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) + \phi_{22}^3)) - \phi_{12}(\phi_{22}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{11}(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) + (\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2))) + \phi_{11} \left( \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \right) \left( \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \right) \right) \end{array} \right.$$

$$\gamma_{11} = \frac{\left( \sigma_{11}((1-\phi_{11}\phi_{22})(1-\phi_{22}^2) - \phi_{12}\phi_{21}(1+\phi_{22}^2)) + (2\phi_{12}\sigma_{12}(\phi_{11}(1-\phi_{22}^2) + \phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}) + \phi_{12}^2\sigma_{22}(1-\phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}\phi_{22})) \right)}{1 + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} - 1)(\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2) + (\phi_{12}\phi_{21} - \phi_{11}\phi_{22})^3}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\left( \phi_{21}\sigma_{11}[\phi_{11}(1-\phi_{22}^2) + \phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}] + \sigma_{12}[(1-\phi_{11}^2)(1-\phi_{22}^2) - \phi_{12}^2\phi_{21}^2] + \phi_{12}\sigma_{22}[\phi_{22}(1-\phi_{11}^2) + \phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}] \right)}{1 + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} - 1)(\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2) + (\phi_{12}\phi_{21} - \phi_{11}\phi_{22})^3}$$

# هماهنگی در زنجیره تامین

تعمیم به  $m$  محصول



$m=2$  دو محصول

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\phi_1 \equiv \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdot & \cdot & \phi_{1m} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdot & \cdot & \phi_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_{m1} & \phi_{m2} & \cdot & \cdot & \phi_{mm} \end{bmatrix}$$

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تعمیم به $m$ محصول



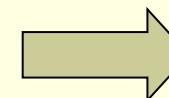
$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{1m} & \gamma_{2m} & \dots & \gamma_{mm} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \phi_{1j} \phi_{1i} \gamma_{ij} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \phi_{2j} \phi_{1i} \gamma_{ij} & \dots & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \phi_{mj} \phi_{1i} \gamma_{ij} \\ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \phi_{1j} \phi_{2i} \gamma_{ij} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \phi_{2j} \phi_{2i} \gamma_{ij} & \dots & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \phi_{mj} \phi_{2i} \gamma_{ij} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \phi_{1j} \phi_{mi} \gamma_{ij} & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \phi_{2j} \phi_{mi} \gamma_{ij} & \dots & \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \phi_{mj} \phi_{mi} \gamma_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1m} & \sigma_{2m} & \dots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}$$

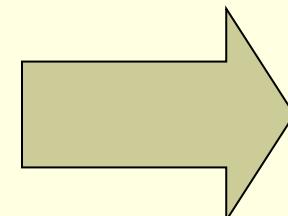
$$\Gamma(k) = \begin{cases} \Gamma(-1)\phi'_1 + \Sigma \\ \Gamma(k-1)\phi'_1 = \Gamma(0)(\phi'_1)^k \end{cases}$$

$$\phi'^k_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1m} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \phi_{m1} & \phi_{m2} & \dots & \phi_{mm} \end{bmatrix}^k$$

تعیین واریانس تقاضا و کوواریانس  
بین تقاضاها



$$\Gamma(0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \dots & \gamma_{mm} \end{bmatrix}$$



$$\gamma_{ii}(k)$$

# هماهنگی در زنجیره تامین

تعمیم به  $m$  محصول



اثر شلاقی محصول آم

$$BE_{p_i}^i = 1 + 2 \left( \frac{L_i}{P_i} \right) \left( 1 + \frac{L_i}{P_i} \right) \left( 1 - \frac{\gamma_{ii}(P_i)}{\gamma_{ii}} \right) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

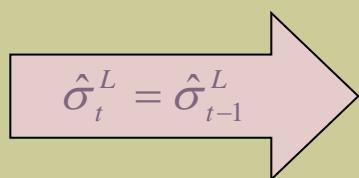
# هماهنگی در زنجیره تامین

تعیین رابطه برای اندازه گیری اثر شلاقی (پیش بینی هموار سازی نمایی)



$$\hat{D}_t = \alpha D_{t-1} + (1 - \alpha) \hat{D}_{t-1}$$

پیش بینی به روش هموار سازی نمایی

$$\hat{\sigma}_t^L = \hat{\sigma}_{t-1}^L$$


$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + D_{t-1}$$

$$Q_t = (1 + \alpha L) D_{t-1} - \alpha L \left[ \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \alpha)^i D_{t-i-2} \right]$$

$$Var(Q_t) = Var \left[ (1 + \alpha L) D_{t-1} - \alpha L \left[ \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \alpha)^i D_{t-i-2} \right] \right]$$

# هماهنگی در زنجیره تامین

تعیین رابطه برای اندازه گیری اثر شلاقی (پیش بینی هموارسازی نمایی)

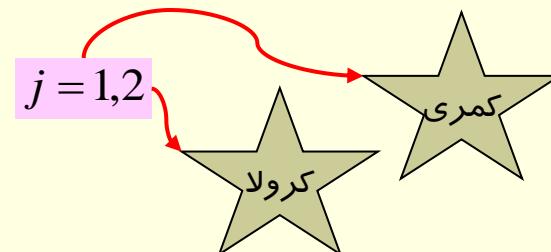


$$Var(Q_t) = \begin{cases} \gamma \left( (1 + \alpha L)^2 + \frac{\alpha^3 L^2}{2 - \alpha} \right) + \left( \frac{2\alpha^3 L^2}{2 - \alpha} \right) \left( \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \alpha)^i \gamma(i) \right) \\ - 2\alpha^2 L (1 + \alpha L) \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \alpha)^i \gamma(i+1) \end{cases}$$

اثر شلاقی هر یک  
از محصولات

$$BE_j = (1 + \alpha_j L_j)^2 + \frac{\alpha_j^3 L_j^2}{2 - \alpha_j} + \frac{\left( \frac{2\alpha_j^3 L_j^2}{2 - \alpha_j} \right) \left( \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \alpha_j)^i \gamma_{jj}(i) \right)}{\gamma_{jj}} - 2\alpha_j^2 L_j (1 + \alpha_j L_j) \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \alpha_j)^i \gamma_{jj}(i+1)$$

$$BE = \frac{Var(Q_t)}{Var(D)}$$



# هماهنگی در زنجیره تامین

تعیین رابطه برای اندازه گیری اثر شلاقی (پیش بینی هموارسازی نمایی)



$$BE_1 = (1 + \alpha_1 L_1)^2 + \frac{\alpha_1^3 L_1^2}{2 - \alpha_1} + \frac{\left( \begin{array}{l} \left( \frac{2\alpha_1^3 L_1^2}{2 - \alpha_1} \right) \left( (1 - \alpha_1)\gamma_{11}(1) + (1 - \alpha_1)^2 \gamma_{11}(2) + (1 - \alpha_1)^3 \gamma_{11}(3) \right) \\ + (1 - \alpha_1)^4 \gamma_{11}(4) + (1 - \alpha_1)^5 \gamma_{11}(5) \\ - 2\alpha_1^2 L_1 (1 + \alpha_1 L_1) \left( \gamma_{11}(1) + (1 - \alpha_1)\gamma_{11}(2) + (1 - \alpha_1)^2 \gamma_{11}(3) \right) \\ + (1 - \alpha_1)^3 \gamma_{11}(4) + (1 - \alpha_1)^4 \gamma_{11}(5) \end{array} \right)}{\gamma_{11}}$$

اثر شلاقی  
توبیوتا کمری

$$BE_2 = (1 + \alpha_2 L_2)^2 + \frac{\alpha_2^3 L_2^2}{2 - \alpha_2} + \frac{\left( \begin{array}{l} \left( \frac{2\alpha_2^3 L_2^2}{2 - \alpha_2} \right) \left( (1 - \alpha_2)\gamma_{22}(1) + (1 - \alpha_2)^2 \gamma_{22}(2) + (1 - \alpha_2)^3 \gamma_{22}(3) \right) \\ + (1 - \alpha_2)^4 \gamma_{22}(4) + (1 - \alpha_2)^5 \gamma_{22}(5) \\ - 2\alpha_2^2 L_2 (1 + \alpha_2 L_2) \left( \gamma_{22}(1) + (1 - \alpha_2)\gamma_{22}(2) + (1 - \alpha_2)^2 \gamma_{22}(3) \right) \\ + (1 - \alpha_2)^3 \gamma_{22}(4) + (1 - \alpha_2)^4 \gamma_{22}(5) \end{array} \right)}{\gamma_{22}}$$

اثر شلاقی  
توبیوتا کرولا

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی



زنجیره تامین دو محصولی که تقاضای محصولات در آن از الگوی زیر پیروی می کند در نظر گرفته می شود:

$$\begin{cases} D_t^1 = 0.7D_{t-1}^1 + 0.6D_{t-1}^2 \\ D_t^2 = 0.2D_{t-1}^1 + 0.5D_{t-1}^2 \end{cases}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\left| \frac{(\phi_{11} + \phi_{22}) \pm \sqrt{(\phi_{11} - \phi_{22})^2 + 4\phi_{12}\phi_{21}}}{2} \right| < 1$$

شرایط ایستایی

$$\left| \frac{(0.7 + 0.5) + \sqrt{(0.7 - 0.5)^2 + 4(0.6)(0.2)}}{2} \right| = 0.96$$

$$\left| \frac{(0.7 + 0.5) - \sqrt{(0.7 - 0.5)^2 + 4(0.6)(0.2)}}{2} \right| = 0.23$$

الگوی تقاضا ایستا است

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

### تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

Microsoft Excel - var1 demand 2 products-resale-ppt-MA-87-02-11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1						3	2	4	5			
2						p1^	p2^	L1^	L2^			
3			فرآیند تقاضا									
4	phi 11>	0.7										
5	phi 12>	0.6										
6	phi 21>	0.2										
7	phi 22>	0.5										
8												
9	numerator	0.78030										
10	denominator	0.05613										
11	gama11>	13.90091										
12												
13	numerator	0.32040										
14	denominator	0.05613										
15	gama12>	5.70787										
16												
17	numerator	0.20190										
18	denominator	0.05613										
19	gama22>	3.59681										
20												

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی

### تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

Microsoft Excel - var1 demand 2 products-resale-ppt-MA-87-02-11

	A	B	C	D	E	
7	phi 22	0.5				
8			p=2			
9	numerator	0.73030	BE1	2.15232	BE2	5.55992
10	denominator	0.05613				
11	gama11>	13.9091				
12			p=3			
13	numerator	0.32040	BE1	1.81447	BE2	3.55079
14	denominator	0.05613				
15	gama12>	5.79187				
16			p=4			
17	numerator	0.20190	BE1	1.66149	BE2	2.73344
18	denominator	0.05613				
19	gama22>	3.50681				
20			p=5			
21			BE1	= $(1+\$H\$1/5)*(1+\$H\$1/5)+(\$H\$1/5)*(\$H\$1/5)-2*(1+\$H\$1/5)*(\$H\$1/5)*(\$C\$4*\$C\$4*\$C\$4*\$C\$4*\$C\$4+\$C\$5*\$C\$6*(4*\$C\$4*\$C\$4*\$C\$4+\$C\$4*\$C\$7+\$C\$5*\$C\$6 * 3*\$C\$4+2*\$C\$7) +\$C\$7*\$C\$7*\$C\$7) +\$C\$5*(\$C\$7*\$C\$4+\$C\$7 * \$C\$4*\$C\$7 * \$C\$4*\$C\$4+2*\$C\$5*\$C\$6+\$C\$7*\$C\$7 +\$C\$5*\$C\$6*\$C\$6*\$C\$4*(3*\$C\$4+2*\$C\$7) +\$C\$5*\$C\$6+\$C\$7*\$C\$7) +\$C\$4*\$C\$4*\$C\$4*\$C\$4)*(\$C\$15/\$C\$11)$		
22						
23						
24						
25						
26						

MA forecasting MA forecasting (2)

# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی



تحلیل پیش بینی میانگین متحرک



مقادیر اثر شلاقی محصول اول (توبوتا کمری)

		p1				
		1	2	3	4	5
L1	1	1.2145	1.1415	1.1163	1.1033	1.0952
	2	1.6436	1.3774	1.2908	1.2481	1.2221
	3	2.2872	1.7077	1.5235	1.4341	1.3808
	4	3.1453	2.1323	1.8144	1.6614	1.5712
	5	4.2179	2.6513	2.1635	1.9302	1.7933
	6	5.5051	3.2646	2.5707	2.2402	2.0472

# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی



تحلیل پیش بینی میانگین متحرک



مقادیر اثر شلاقی محصول دوم (توبوتا کرولا)

p2

	1	2	3	4	5	
L2	1	1.7304	1.3737	1.2551	1.1981	1.1653
	2	3.1913	1.9965	1.6377	1.4755	1.3858
	3	5.3827	2.8685	2.1478	1.8322	1.6613
	4	8.3046	3.9896	2.7855	2.2682	1.9921
	5	11.956	5.3599	3.5507	2.7834	2.3778
	6	16.339	6.9793	4.4435	3.3779	2.8187

# هماهنگی در زنجیره تامین

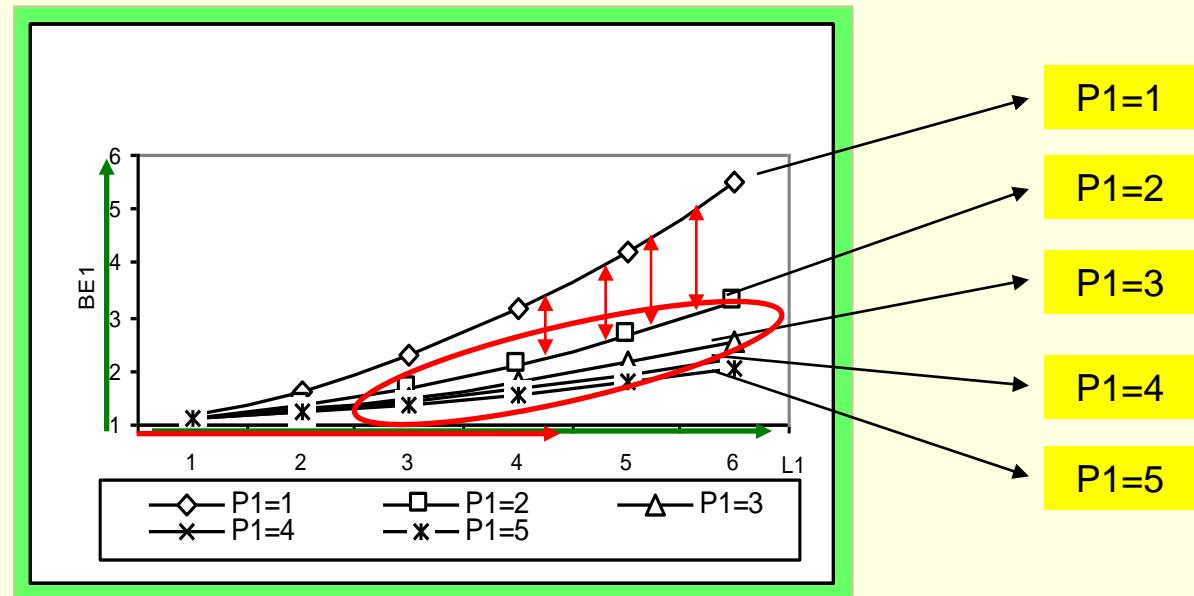
تحلیل عددی

تحلیل پیش بینی میانگین متحرک

اثر شلاقی با لیدتايم نسبت  
مستقيم دارد

با افزایش لیدتايم تأثیر تعداد دوره های مورد استفاده در پیش بینی میانگین متحرک در مقدار اثر شلاقی افزایش می یابد به گونه ای که افزایش تعداد دوره ها از ۱ به ۲ منجر به کاهش تقریباً ۵ درصدی در مقدار اثر شلاقی می شود. این مقدار ببود برای سایر مقادیر  $P$  کمتر است.

تغییرات اثر شلاقی محصول اول (تویوتا کمری) نسبت به لیدتايم



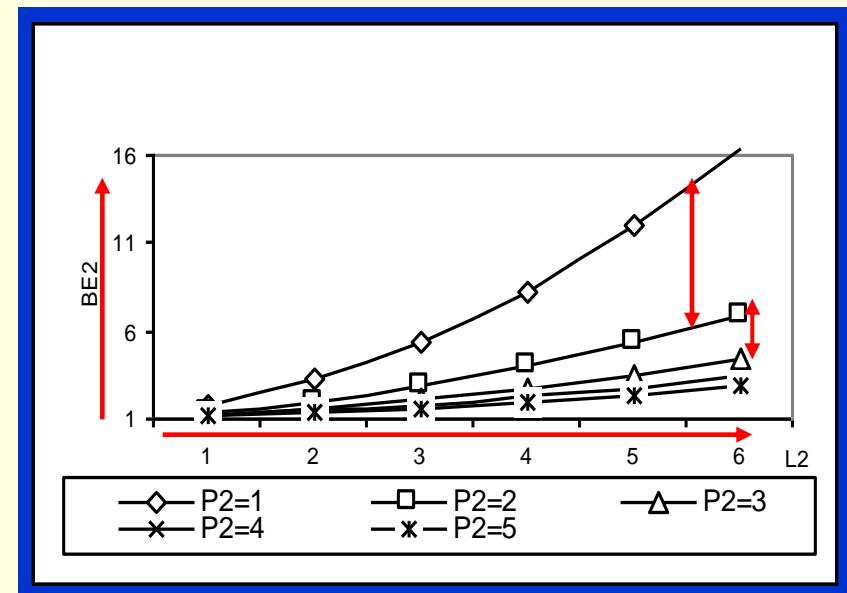
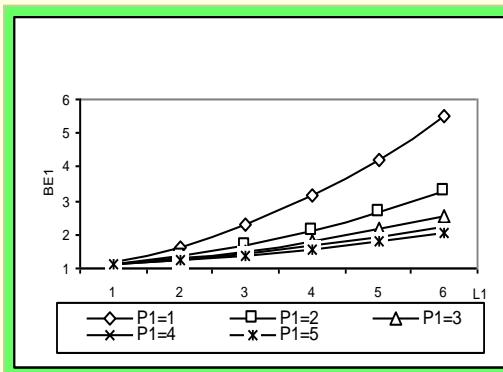
# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی

تحلیل پیش بینی میانگین متغیر



تغییرات اثر شلاقی محصول دوم (تویوتا کروولا) نسبت به لیدتايم



# هماهنگی در زنجیره تامین

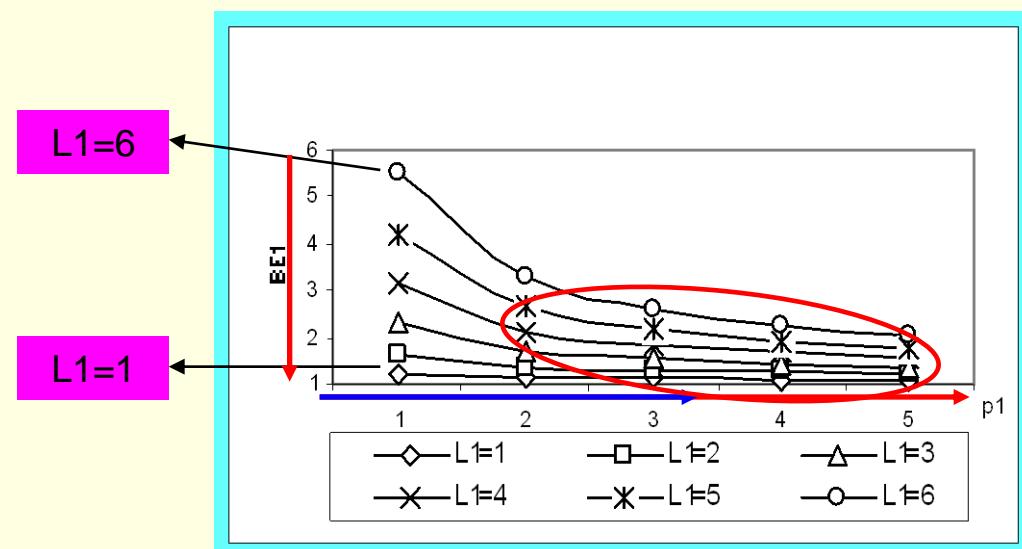
## تحلیل عددی

### تحلیل پیش بینی میانگین متغیر

اثر شلاقی با تعداد دوره های مورد استفاده در پیش بینی میانگین متغیر نسبت معکوس دارد

با افزایش تعداد دوره های مورد استفاده در پیش بینی میانگین متغیر تاثیر لیدتايم در مقدار اثر شلاقی کاهش می یابد به گونه ای که در شرایط استفاده از دوره های زیاد در پیش بینی، حساسیت لیدتايم کاهش چشمگیر از خود نشان می دهد.

تغییرات اثر شلاقی محصول اول (تویوتا کمری) نسبت به تعداد دوره ها

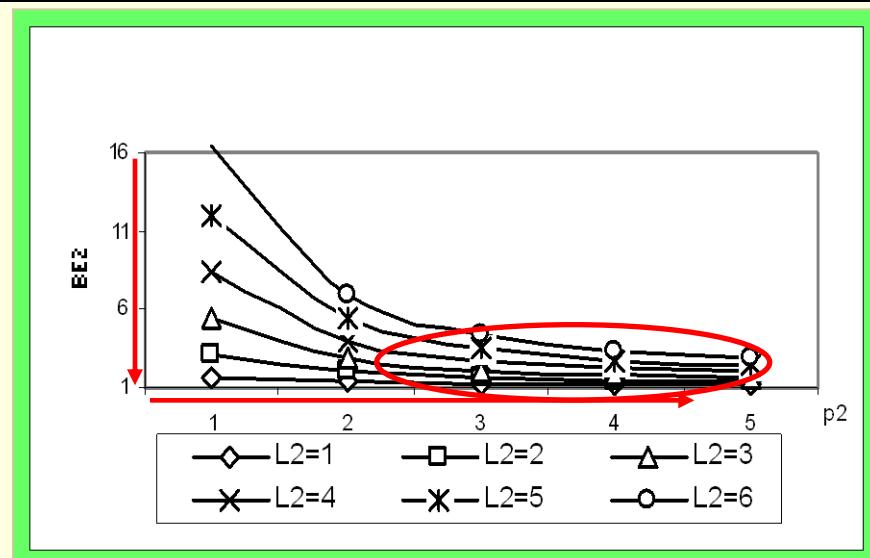
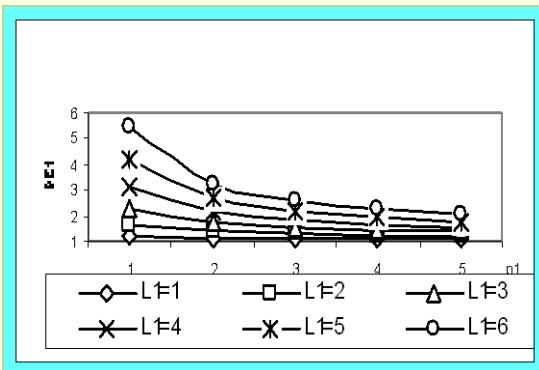


# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی

تحلیل پیش بینی میانگین متغیر

تغییرات اثر شلاقی محصول دوم (تویوتا کروولا) نسبت به نسبت به تعداد دوره ها



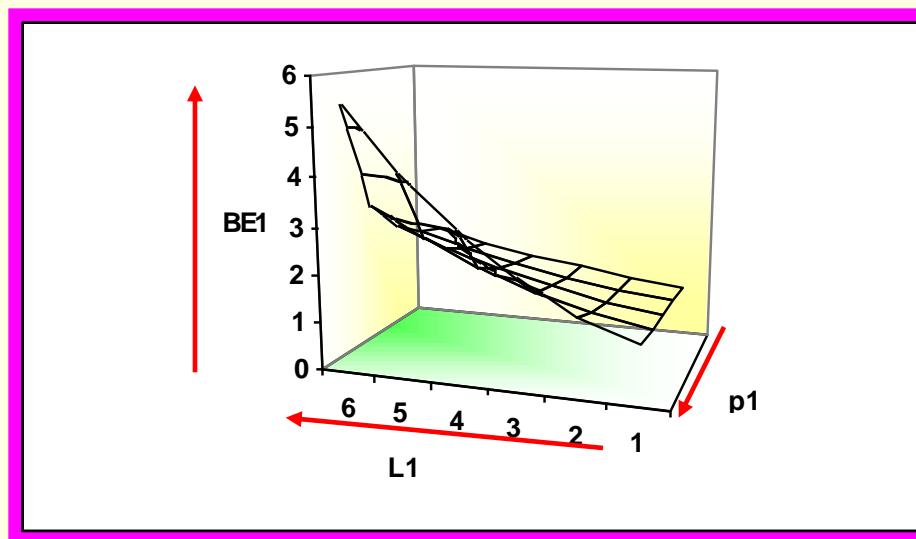
# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی

تحلیل پیش بینی میانگین متغیر



## تغییرات همزمان لیدتايم و تعداد دوره ها- محصول اول- تویوتا کمری



افزایش تعداد دوره های پیش بینی و کاهش تعداد دوره های مورد استفاده در پیش بینی میانگین متغیر (بصورت همزمان) منجر به کاهش اثر شلاقی می شود

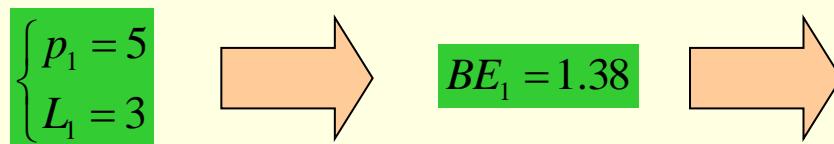
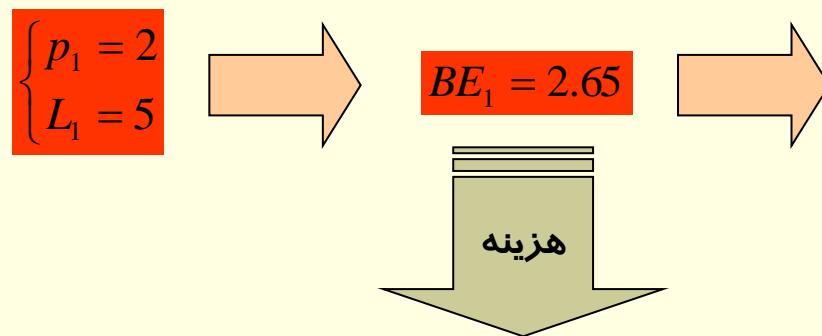
# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی

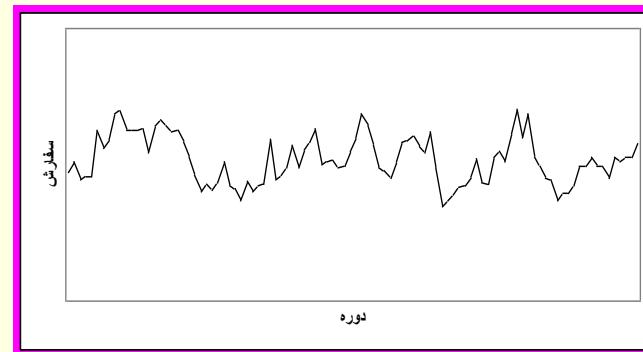
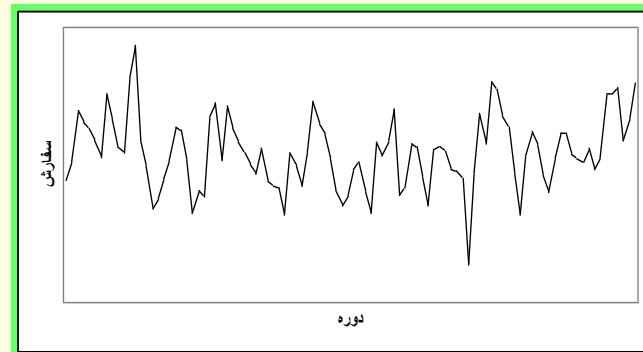
تحلیل پیش بینی میانگین متغیر



## مدیریت اثر شلاقی و انتخاب $p$ و $L$



خرده فروش و تامین کننده در یک تعامل می‌توانند از طریق بررسی منافع حاصله از کاهش اثر شلاقی نسبت به تغییر پارامترها اقدام و سود زنجیره تامین را افزایش دهند



# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی

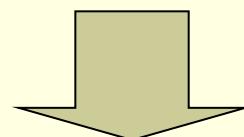
تحلیل پیش بینی میانگین متغیر

مدیریت اثر شلاقی و انتخاب  $p$  و  $L$

$p_1$	$L_1$	$BE1$
1	2	1.64
4	4	1.66

خرده فروش با افزایش تعداد دوره ها در محاسبات پیش بینی خود، میتواند تاثیر افزایش لیدتايم را از اثر شلاقی حذف کند

تعیین خطوط همتراز



# هماهنگی در زنجیره تامین

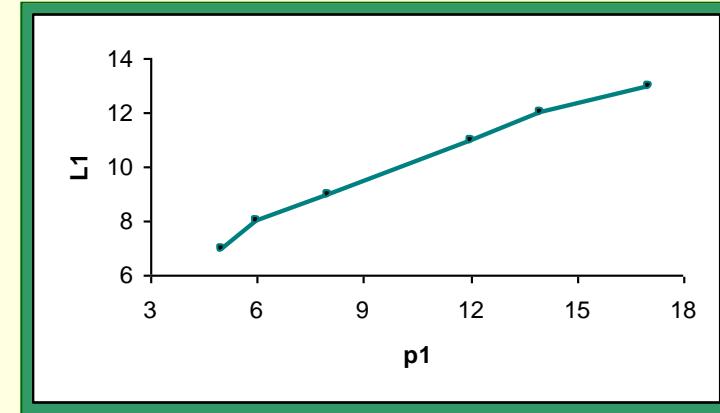
تحلیل عددی

تحلیل پیش بینی میانگین متغیر



## مدیریت اثر شلاقی و انتخاب $p$ و $L$

$p_1$	$L_1$	$BE_1$
5	7	2.38
6	8	2.43
8	9	2.33
10	10	2.38
12	11	2.38
14	12	2.40
17	13	2.36



$$BE_1 \approx 2.4$$

به منظور مدیریت و کنترل اثر شلاقی می توان با استفاده از خطوط همتراز، ترکیبات مختلف لیدتايم و تعداد دوره های پیش بینی را انتخاب کرد

# هماهنگی در زنجیره تامین

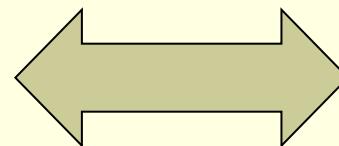
تحلیل عددی

تحلیل پیش بینی میانگین متغیر

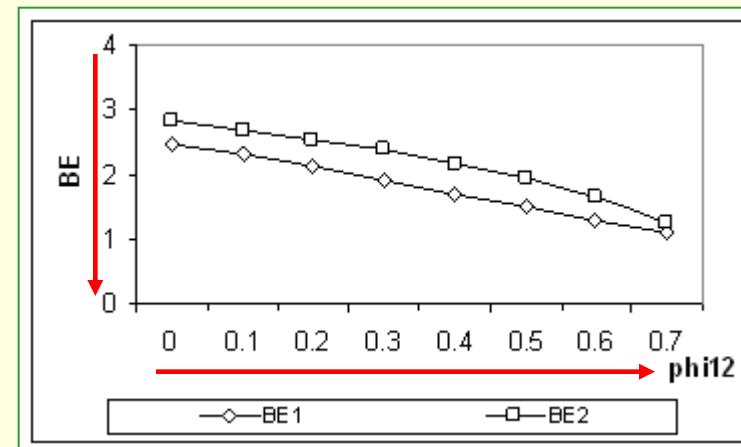


## اثر شلاقی و مدیریت بازار

میزان ارتباط تقاضای تویوتا کمری  
در ماه جاری به تقاضای ماه قبل  
تویوتا کرولا



$$-0.05 < \phi_{12} < 0.75$$



# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی

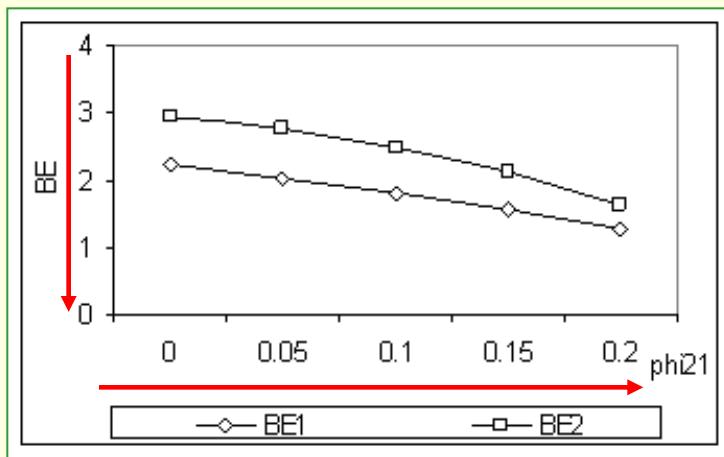
تحلیل پیش بینی میانگین متغیرک



## اثر شلاقی و مدیریت بازار

$$-0.016 < \phi_{21} < 0.25$$

میزان ارتباط تقاضای تویوتا کروولا در  
ماه جاری به تقاضای ماه قبل تویوتا  
کمری



# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی

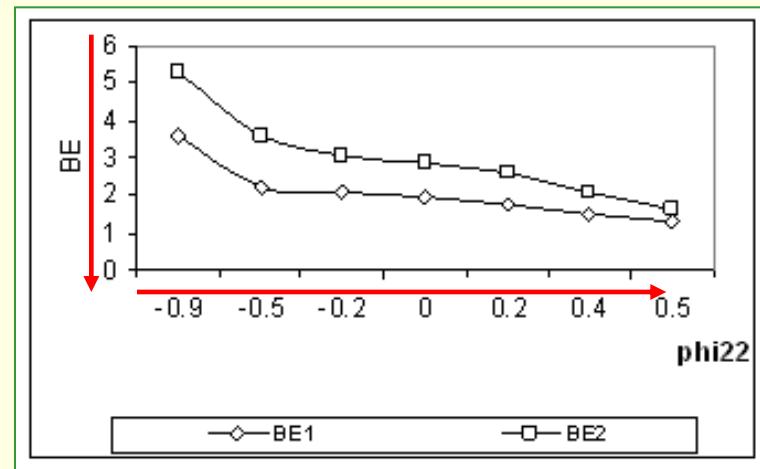
تحلیل پیش بینی میانگین متغیر



**اثر شلاقی و مدیریت بازار**

میزان ارتباط تقاضای تویوتا کمری  
در ماه جاری به تقاضای ماه قبل  
تویوتا کرولا

$$-0.93 < \phi_{22} < 0.6$$



از طریق مدیریت مصرف و اعمال تغییر در ضرایب الگوی تقاضای هر محصول  
میتوان اثر شلاقی را برای هر دو محصول کاهش داد

# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی

تحلیل پیش بینی هموارسازی نمایی



		مقادیر اثر شلاقی محصول اول - تویوتا کمری				
		alpha1				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1
L1	1	1.179	1.165	1.149	1.170	1.215
	2	1.394	1.397	1.388	1.477	1.644
	3	1.646	1.694	1.716	1.919	2.287
	4	1.932	2.058	2.134	2.498	3.145
	5	2.255	2.488	2.641	3.213	4.218
	6	2.614	2.983	3.238	4.064	5.505

# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی

تحلیل پیش بینی هموارسازی نمایی



## مقادیر اثر شلاقی محصول دوم - تویوتا کرولا

		alpha2				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1
L2	1	1.223	1.297	1.385	1.528	1.730
	2	1.490	1.713	2.001	2.478	3.191
	3	1.802	2.248	2.848	3.850	5.383
	4	2.159	2.912	3.926	5.645	8.305
	5	2.560	3.675	5.236	7.861	11.957
	6	3.006	4.566	6.776	10.501	16.340

# هماهنگی در زنجیره تامین

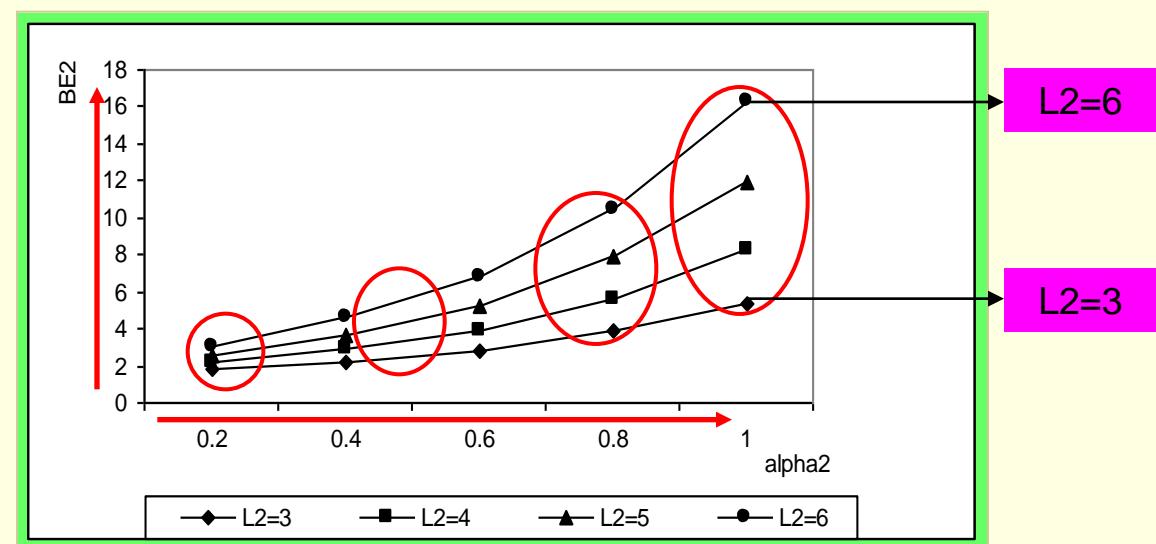
تحلیل عددی

تحلیل پیش بینی هموارسازی نمایی

## تغییرات اثر شلاقی محصول دوم (تویوتا کروولا) نسبت به ضریب هموارسازی

اثر شلاقی با ضریب هموارسازی نمایی نسبت مستقیم دارد

با افزایش ضریب هموارسازی (اهمیت دادن زیاد به داده های اخیر)، تاثیر لیدتايم در مقدار اثر شلاقی افزایش می یابد



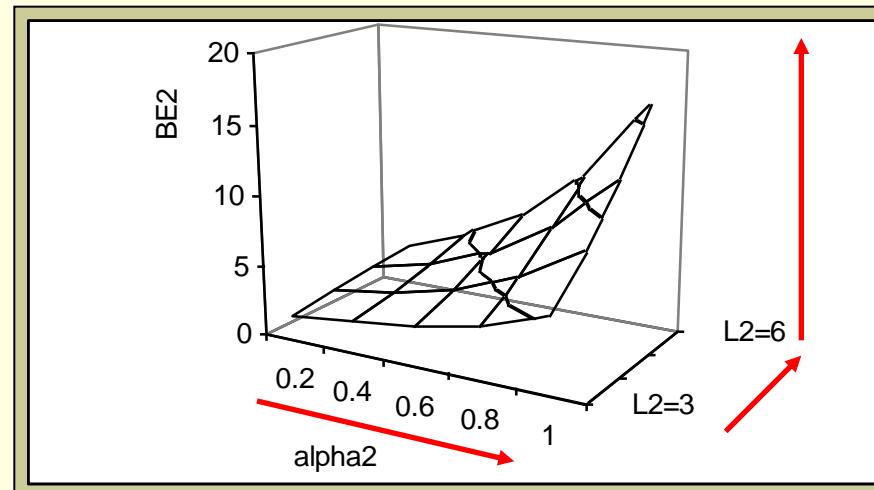
# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی

تحلیل پیش بینی هموارسازی نمایی



تغییرات همزمان اثر شلاقی محصول دوم (تویوتا کرولا) نسبت به ضریب هموارسازی



افزایش همزمان ضریب هموارسازی و لیدتايم منجر به افزایش اثرشلاقی  
می شود

# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی



مقایسه دو روش پیش بینی با یکدیگر



میانگین طول عمر داده های یکسان برای دو روش

$$\frac{p+1}{2} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{2}{p+1}$$

# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی

مقایسه دو روش پیش بینی با یکدیگر

مقادیر اثر شلاقی با توجه به دو روش پیش بینی با طول عمر داده های یکسان

L2=3

BE2	alpha2	p2	BE2
2.1022	0.33	5	1.6614
2.2481	0.4	4	1.8323
2.5078	0.5	3	2.1479
3.1314	0.67	2	2.8685
5.3828	1	1	5.3628

مقادیر اثر شلاقی محصول دوم-توبیوتا کرولا

L1=3

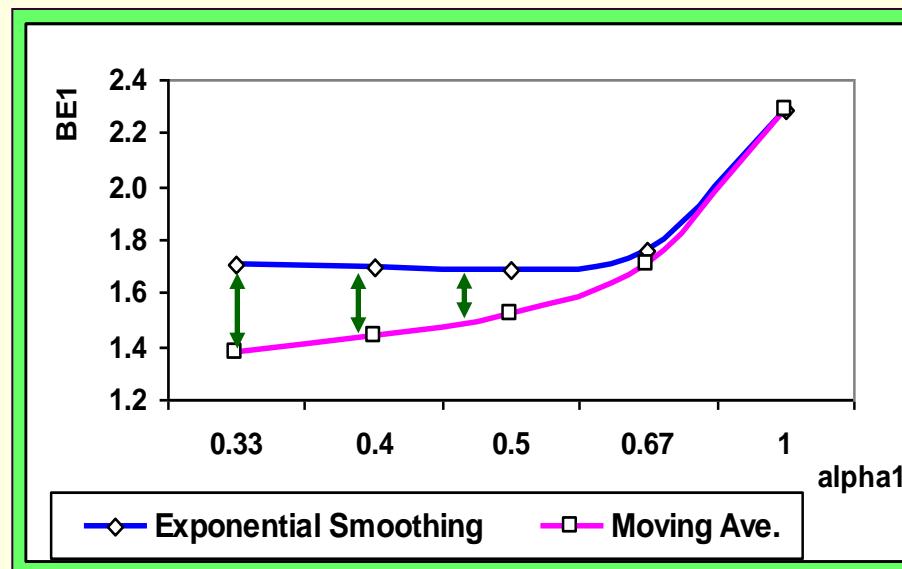
BE1	alpha1	p1	BE1
1.7018	0.33	5	1.3808
1.6942	0.4	4	1.4341
1.6837	0.5	3	1.5236
1.7625	0.67	2	1.7077
2.2872	1	1	2.2872

مقادیر اثر شلاقی محصول اول-توبیوتا کمری

# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی

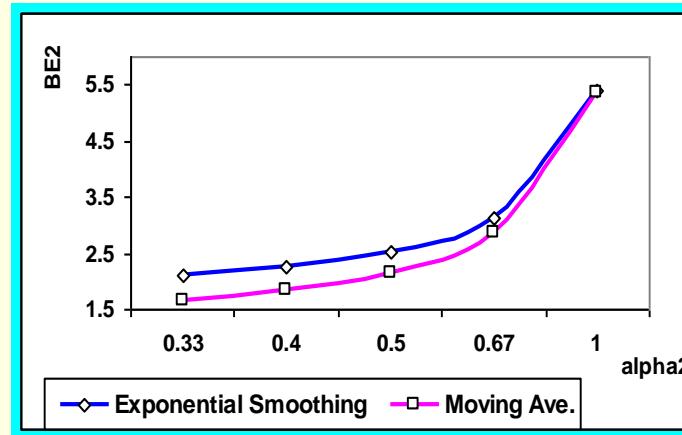
مقایسه دو روش پیش بینی با یکدیگر



# هماهنگی در زنجیره تامین

تحلیل عددی

مقایسه دو روش پیش بینی با یکدیگر



استفاده از روش پیش بینی میانگین متغیر کثیر شلاقی کمتری نسبت به روش پیش بینی هموارسازی نمایی ایجاد می کند

# هماهنگی در زنجیره تامین



تحلیل عددی



تحلیل هزینه



بررسی نقش هزینه های کمبود و نگهداری در اثر شلاقی

$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + z(\hat{\sigma}_t^L - \hat{\sigma}_{t-1}^L) + D_{t-1}$$

$$\hat{\sigma}_t^L = \hat{\sigma}_{t-1}^L$$

$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + D_{t-1}$$

$$z = \phi^{-1}\left(\frac{b}{h+b}\right)$$

حذف

هزینه نگهداری واحد محصول **h**  
هزینه کمبود واحد محصول **b**

هزینه نگهداری و هزینه کمبود در مقدار اثر شلاقی نقشی ندارند

# هماهنگی در زنجیره تامین



تحلیل عددی



تحلیل هزینه



بررسی نقش اثر شلاقی در هزینه های کمبود و نگهداری

Zhang, 2004

$$\bar{B} = Q(z) \sigma_t^L$$

متوسط کمبود

$$\bar{I} = Q(-z) \sigma_t^L$$

متوسط موجودی

$$\hat{\sigma}_t^L = \hat{\sigma}_{t-1}^L$$

$$(\hat{\sigma}_t^L)^2 = L\gamma + 2 \sum_{i=1}^{L-1} (L-i)\gamma(i) + \left(\frac{L}{p}\right) [L\gamma - 2[\gamma(1) - \left(\frac{L}{p}\right) \sum_{i=1}^{p-1} (p-i)\gamma(i) + \sum_{i=2}^{L+p-1} \gamma(i)]]]$$

$$Q(z) = \int_z^\infty (x-z) \varphi(x) dx$$

# هماهنگی در زنجیره تامین



تحلیل عددی



تحلیل هزینه



## بررسی نقش اثر شلاقی در هزینه های کمبود و نگهداری

### محصول دوم-توبوتا کرولا

$$p_1 = 2$$

$$h_2 = 120$$

$$L_1 = 3$$

$$b_2 = 600$$

$$BE_2 = 2.87$$

$$\left(\hat{\sigma}_t^L\right)_2 = 5.04$$

$$(IC)_2 = h_2 * \bar{I}_2 = 120 * 5.332 = 640$$

$$(BC)_2 = b_2 * \bar{B}_2 = 600 * 0.443 = 266$$

### محصول اول-توبوتا کمری

$$p_1 = 2$$

$$h_1 = 185$$

$$L_1 = 3$$

$$b_1 = 780$$

$$BE_1 = 1.70$$

$$\left(\hat{\sigma}_t^L\right)_1 = 9.64$$

$$(IC)_1 = h_1 * \bar{I}_1 = 185 * 9.49 = 1756$$

$$(BC)_1 = b_1 * \bar{B}_1 = 780 * 1.002 = 782$$

خرده فروش و تامین کننده در یک تعامل لیدتايم را به ۲ و تعداد دوره ها را به ۳ تغییر می دهند

# هماهنگی در زنجیره تامین



تحلیل عددی



تحلیل هزینه



بررسی نقش اثر شلاقی در هزینه های کمبود و نگهداری

محصول دوم-توبیوتا کرولا

$$BE_2 = 1.64$$

$$(\hat{\sigma}_t^L)_2 = 3.36$$

$$(IC)_2 = h_2 * \bar{I}_2 = 120 * 3.55 = 426$$

$$(BC)_2 = b_2 * \bar{B}_2 = 600 * 0.3 = 200$$

محصول اول-توبیوتا کمری

$$BE_1 = 1.29$$

$$(\hat{\sigma}_t^L)_1 = 6.43$$

$$(IC)_1 = h_1 * \bar{I}_1 = 185 * 6.33 = 1171$$

$$(BC)_1 = b_1 * \bar{B}_1 = 780 * 0.67 = 523$$

# هماهنگی در زنجیره تامین



تحلیل عددی



تحلیل هزینه



## بررسی نقش اثر شلاقی در هزینه های کمبود و نگهداری

### محصول دوم-توبوتا کرولا

هزینه نگهداری

640



426

### محصول اول-توبوتا کمری

1756



1171

هزینه کمبود

266



200

782



523

کاهش اثر شلاقی منجر به کاهش هزینه کمبود و هزینه نگهداری می گردد

# هماهنگی در زنجیره تامین



تحلیل عددی



تحلیل هزینه



بررسی نقش اثر شلاقی در هزینه های کمبود و نگهداری

کل هزینه نگهداری و کمبود در حالت نخست

کل هزینه نگهداری و کمبود در حالت بهبود یافته

3444

بهبود

2320

۳۴۴۴  
بهبود  
۲۳۲۰

$$3444 - 2320 = 1124$$

در صورتی که هزینه تغییر ۲ از ۳ و کاهش L از ۳ به ۲ بیش از ۱۱۲۴ باشد هزینه کاهش اثر شلاقی بیش از منافع آن است و اعمال تغییر در پارامترها می تواند مقدرون به صرفه نباشد

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی



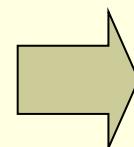
مثال عددی-زنجیره تامین ۳ محصولی

$$\begin{cases} D_t^1 = 0.1D_{t-1}^1 + 0.2D_{t-1}^2 + 0.3D_{t-1}^3 \\ D_t^2 = 0.2D_{t-1}^1 + 0.2D_{t-1}^2 + 0.7D_{t-1}^3 \\ D_t^3 = 0.8D_{t-1}^1 + 0.5D_{t-1}^2 + 0.2D_{t-1}^3 \end{cases}$$

$$L_1 = 2 \quad L_2 = 4 \quad L_3 = 5$$

$$p = 2$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.5 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 & -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\Gamma(0) = \begin{bmatrix} 2.03 & 2.29 & 0.42 \\ 2.29 & 4.54 & 2.66 \\ 0.42 & 2.66 & 4.35 \end{bmatrix}$$

# هماهنگی در زنجیره تامین

## تحلیل عددی



مثال عددی-زنجیره تامین ۳ محصولی

$$\Gamma(2) = \begin{bmatrix} 2.03 & 2.29 & 0.42 \\ 2.29 & 4.54 & 2.66 \\ 0.42 & 2.66 & 4.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 & -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.12 & 2.27 & 0.67 \\ 1.91 & 3.53 & 2.45 \\ 1.59 & 1.67 & 3.17 \end{bmatrix}$$

$$BE_2^1 = 1 + 2\left(\frac{2}{2}\right)\left(1 + \frac{2}{2}\right)\left(1 - \frac{1.12}{2.03}\right) = 2.79$$

$$BE_2^2 = 1 + 2\left(\frac{4}{2}\right)\left(1 + \frac{4}{2}\right)\left(1 - \frac{3.53}{4.54}\right) = 3.64$$

$$BE_2^3 = 1 + 2\left(\frac{5}{2}\right)\left(1 + \frac{5}{2}\right)\left(1 - \frac{3.17}{4.35}\right) = 4.45$$